MÉTODOS NUMÉRICOS PARA AJUSTE DE CURVAS

Evandro Pedro Alves de Mendonçaa, Marcelino José de Lima Andradea.

a Núcleo de Tecnologia (NTI), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Campus Acadêmico do Agreste (CAA), Rodovia BR-104, km 59, S/N, Nova Caruaru, CEP. 55.014-900, Caruaru-PE, Brasil, <http://www.ufpe.br/caa>

**Palavras Chave:** ajuste de curvas, resíduos, polinômios, aproximação, dados experimentais, regressão linear.

**Resumo**: Em diversas situações no cotidiano científico, é necessário encontrar uma fórmula matemática que represente um conjunto finito de pontos. Este procedimento pode ser realizado através do ajuste de curvas, nele é possível realizar aproximações para um conjunto de dados ou uma função através de diversas funções simples. Neste trabalho serão exploradas as aproximações lineares através de uma reta (polinômio de primeiro grau), linearização de funções não lineares e, por fim, de um polinômio de segundo grau (cujo procedimento pode ser estendido para polinômios de graus superiores).

1. INTRODUção

Muitos estudos e observações são feitos a partir de experimentos, onde os resultados obtidos são analisados e guardados. Algumas vezes, esses dados são armazenados quase que continuamente fazendo com que seja fácil a dedução de alguma função que represente bem aquele conjunto de dados. Porém, geralmente não há espaço suficiente para guardar dados contínuos ou simplesmente não é possível obter tais dados de forma contínua. Por isso é necessário gravar um conjunto de pontos discretos.

Portanto, é preciso definir uma função, ou seja, uma curva que defina esses pontos da melhor forma possível, pois, a partir de uma equação geral fica mais fácil determinar a solução de determinado problema. Existem diversas formas de determinar uma curva para certo conjunto de dados como a interpolação e o ajuste de curvas.

Nesse trabalho é usado um método de ajuste de curvas, o método dos mínimos quadrados, que busca diminuir a diferença entre os valores reais e os valores aproximados obtidos por uma função ajustada aos pontos. Os erros, ou resíduos, são definidos como uma função, que é minimizada por meio de derivadas parciais. Mais detalhes sobre o método serão abordados na discussão dos resultados.

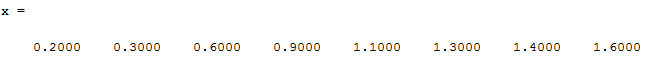
1. Exercícios Propostos

Segue, abaixo, a solução dos exercícios propostos sobre o tema.

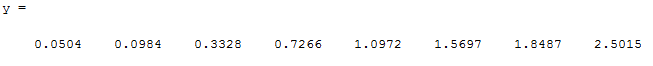
* 1. 1ª questão

Em todos os exercícios propostos na primeira questão têm-se alguns dados em comum, pois em todos eles é usado o método dos mínimos quadrados. Esses dados estão dispostos a seguir:

**X** - Vetor linha que contém todos os pontos no eixo usados para realizar as aproximações por funções.



**Y** **-** Vetor linha que possuem os valores de Y para cada respectivo X.



* + 1. **1.a)**

**Todos os detalhes da letra (a) encontram-se no anexo 2.**

* Aproximando os pontos dados nos vetores X e Y para uma função do tipo:

**F(x) = a + bx**

Usando o método dos Mínimos Quadrados no Matlab (anexo 1), obtêm-se os seguintes resultados:

X1 = -0,5125

X2 = 1,6655

Desta forma, obtém-se a seguinte função:  **F(x) = -0,5125 + 1,6655\*x**

PLOTAR O GRÁFICO E FAZER O RESÍDUO

* Para aproximar os pontos dados nos vetores Xi e Yi para uma função do tipo:

**F(x) = a + bx + cx2**

Usando o método dos Mínimos Quadrados no Matlab (anexo 1), obtêm-se os seguintes resultados:

X1 = 0,0851

X2 = -0.3114

X3 = 1.1294

Desta forma, obtém-se a seguinte função: **F(x) = 0,0851 – 0,3114\*x + 1,1294\*x2**

PLOTAR O GRÁFICO E FAZER O RESÍDUO

* Para aproximar os pontos dados nos vetores Xi e Yi para uma função do tipo:

**F(x) = a + bx + cx2 + dx3**

Usando o método dos Mínimos Quadrados no Matlab (anexo 1), obtêm-se os seguintes resultados:

X1 = -0.0184

X2 = 0.2484

X3 = 0.4029

X4 = 0.2662

Desta forma, obtém-se a seguinte função:

**F(x) = -0,0184 + 0,2484\*x + 0,4029\*x2 – 0,2662\*x3**

PLOTAR O GRÁFICO E FAZER O RESÍDUO

* Para aproximar os pontos dados para uma função do tipo:

**F(x) = b\*ea\*x**

* + 1. **1.b)**
    2. **1.c)**
  1. 2ª questão

Foram coletados 30 preços de carros com as características exigidas pelo comprador. Os preços, anos e quilometragens de cada carro pesquisado estão descritos na tabela a seguir:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **R$** | **ANO** | **KM** |
| 7000 | 2009 | 48000 |
| 6800 | 2009 | 63000 |
| 7300 | 2009 | 81000 |
| 7500 | 2009 | 62825 |
| 7490 | 2010 | 41135 |
| 11000 | 2010 | 35000 |
| 7500 | 2010 | 38785 |
| 6800 | 2010 | 60000 |
| 7000 | 2011 | 66365 |
| 6800 | 2011 | 44000 |
| 7800 | 2011 | 46500 |
| 7900 | 2011 | 48910 |
| 8500 | 2012 | 32293 |
| 7300 | 2012 | 108008 |
| 7900 | 2012 | 50000 |
| 9000 | 2012 | 50000 |
| 10000 | 2013 | 5890 |
| 8400 | 2013 | 36000 |
| 10900 | 2013 | 13472 |
| 9990 | 2013 | 18000 |
| 9500 | 2014 | 31353 |
| 10490 | 2014 | 27000 |
| 12000 | 2014 | 7000 |
| 9900 | 2014 | 29000 |
| 10500 | 2014 | 18000 |
| 11500 | 2015 | 6000 |
| 11690 | 2015 | 8378 |
| 10900 | 2015 | 4900 |
| 9500 | 2015 | 44000 |
| 11290 | 2015 | 20000 |
|  |  |  |
| TOTAL: 30 MOTOS |  |  |

**MODELO: HONDA CB 300R**

OBS: NO SITE NÃO TINHAM MOTOS NOS ANOS DE 2016/2017.

OBS: AS MOTOS ATINGIRAM O LIMITE MÁXIMO DE TEMPO DA PESQUISA.

Deseja-se ter uma estimativa do preço de uma moto em um ano aleatório e com quilometragem a ser definida por meio de uma função que represente tais valores. Pode-se fazer isso pelo método dos mínimos quadrados com duas variáveis, são elas, o ano e a quilometragem. Para isso, colocou- se em um vetor, chamado km, a quilometragem de cada moto pesquisada. Em outro vetor, chamado ano, colocou-se o ano correspondente a cada moto pesquisada. A função preço fica da seguinte forma:

**Preço = a + b \* Ano + c\*Km**

Para determinar os coeficientes a, b e c, utiliza-se o método dos mínimos quadrados, que fica definido no sistema linear, na forma matricial abaixo:

C x I = R

* Onde C é a matriz dos coeficientes, dada por:

n - Número de motos (Vetor unitário).

Fazendo todos os produtos internos, a matriz dos coeficientes fica:

* I é a matriz das incógnitas, ou seja, as constantes a,b e c que se quer descobrir.
* R é o vetor das constantes, dado por:

<preço,n>

<preço,ano>

<preço,km>

preço - vetor com todos os preços.

Fazendo os produtos internos, a matriz das respostas fica:

270150

543669630

9.3330e+09

Substituindo os valores encontrados e aplicando no algoritmo da eliminação de gauss, obtemos os valores de a,b e c, que são mostrados abaixo como X1,X2 e X3 respectivamente:

X1 = -784291.1102713822

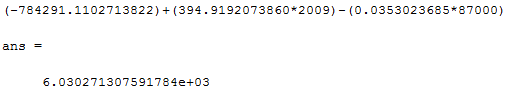
X2 = 394.9192073860

X3 = -0.0353023685

Desta forma, tem-se a função preço dada da seguinte forma:

**Preço = -784291,1102713822 + 394,9192073860 \* Ano – 0,0353023685 \* Km**

Aplicando parâmetros da moto na fórmula encontrada acima, encontra-se o seguinte resultado:



Isto é, o valor da moto é: 6030,27

**b)** Com o valor da venda calculada no item anterior mais os R$5.000,00 fornecidos, totaliza R$11030,27, seria possível comprar as seguintes motos com menor tempo de uso qualquer uma das motos a seguir que ele preferir:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **R$** | **ANO** | **KM** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| 7490 | 2010 | 41135 |
| 11000 | 2010 | 35000 |
| 7500 | 2010 | 38785 |
| 6800 | 2010 | 60000 |
| 7000 | 2011 | 66365 |
| 6800 | 2011 | 44000 |
| 7800 | 2011 | 46500 |
| 7900 | 2011 | 48910 |
| 8500 | 2012 | 32293 |
| 7300 | 2012 | 108008 (mais quilômetros rodados que a atual) |
| 7900 | 2012 | 50000 |
| 9000 | 2012 | 50000 |
| 10000 | 2013 | 5890 |
| 8400 | 2013 | 36000 |
| 10900 | 2013 | 13472 |
| 9990 | 2013 | 18000 |
| 9500 | 2014 | 31353 |
| 10490 | 2014 | 27000 |
|  |  |  |
| 9900 | 2014 | 29000 |
| 10500 | 2014 | 18000 |
|  |  |  |
|  |  |  |
| 10900 | 2015 | 4900 |
| 9500 | 2015 | 44000 |
|  |  |  |
|  |  |  |
| TOTAL: 22 motos |  |  |

Em relação aos anos, ele teria uma quantidade considerável de escolhas para comprar, porém, algumas mesmo sendo mais novas têm mais quilômetros rodados, deve-se levar em conta isso também.

**c)** Para descobrir a depreciação a cada 10.000 km rodados, basta multiplicar esse número pela derivada parcial da função Preço com respeito a Q, que significa a taxa de variação do preço a cada quilômetro rodado:

Depreciação\_km = (-0.0353023685) x 10.000 = -353,023

Ou seja, o valor da moto perde R$353,023a cada 10.000km rodados.

**d)** O fator que multiplica o ano da moto tem por base a diferença entre o ano da moto e o ano atual. Assim, para saber a depreciação em um ano, pode ser feito o seguinte cálculo:

Depreciação\_ano = (394,9192073860) x (ano - (ano + 1))

Depreciação\_ano = (394,9192073860) x (ano - ano - 1)

Depreciação\_ano = (394,9192073860) x (-1)

Depreciação\_ano = -394,9192073860

Portanto, a moto se desvaloriza cerca de R$394,91 por ano.

QUANDO ACABAR A QUESTÃO COLOCAR NO ANEXO A FUNÇÃO PARA CALCULAR O PRODUTO INTERNO E A ELIMINAÇÃO DE GAUSS.

* 1. 3ª questão

**2.3.1 3.a)**

1. conclusão

Ao longo do trabalho, diversas formas de regressão linear foram empregadas para realizar o ajuste de curvas. No seu caso mais simples, aproximando uma função por uma reta (ou polinômio de primeiro grau). Para aproximar por funções que não são lineares, o método pode ser aplicado desde que se reescreva a função em questão numa forma linear, como no caso da função exponencial, que teve que ser expressa como uma função logarítmica para que fosse encontrada a relação linear e, assim, usar a regressão linear. Também foi utilizada a função polinomial de segunda ordem para realizar esse mesmo procedimento, onde foi aplicada uma técnica análoga ao polinômio do primeiro grau e que pode ser estendida para polinômios de ordens superiores. Há que se ter um cuidado, contudo, com polinômios de ordens muito grandes, pois, como foi mencionado no trabalho, estes podem até passar por todos os pontos do conjunto dado, mas o erro relativo entre esses pontos torna-se grande ao ponto de não serem representativos.

O que há de comum entre todos esses métodos é o fato de que eles partem do mesmo princípio: o método dos mínimos quadrados. Isso se faz através do cálculo do erro entre a função de aproximação e a função original (ou conjunto de pontos). Quando o erro é expresso por uma equação quadrática, podemos encontrar valores em que o erro calculado será mínimo. Em termos matemáticos, isso significa que as derivadas parciais dessa função com relação às suas variáveis é nula. Assim, podem ser encontradas expressões que, combinadas, formam um sistema linear que, por sua vez, encontradas as soluções deste, são encontrados os valores dos coeficientes das funções de aproximação. Além disso, como o erro calculado nesses pontos é mínimo, garante-se que esta é a melhor solução.

Portanto, O ajuste de curvas se mostra uma ferramenta muito útil para achar fórmulas matemáticas para um conjunto finito de pontos que seja representativa e com um erro relativo pequeno.

REFERÊNCiaS

Chapra, S. C., e Canale, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 5ª edição. Porto Alegre: AMGH, 2011.

Gilat, A., e Subramaniam, V. *Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB*. Porto Alegre: Bookman, 2008.

anexo 1

função para calcular os minimos quadrados

anexo 2

Resultados matlab questão 1 a)

* Primeira função:

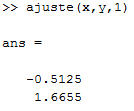


Figura 1: Resultado da primeira função.

* SEGUNDA FUNÇÃO:

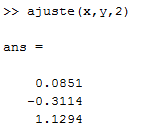
****

Figura 2: Resultado da segunda função.

* TERCEIRA FUNÇÃO

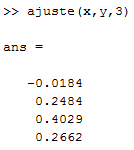
****

Figura 3: Resultado da terceira função.

anexo 3